Internationales Studienkolleg der Hochschule Kaiserslautern

Semester: Sommersemester 2019

FSP-Teilprüfung: Mathematik TA2

Datum: 11.06.2019

Dauer: 90 Minuten

Prüfer: Dr. Jens Siebel, Werner Müller, Daniel Nyman, Jörg Wilhelm

Aufgabe 1

Wir haben die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - 4 \cdot i$ und $z_2 = -1 + i$.

a) Stellen Sie z_1 und z_2 jeweils in trigonometrischer Form dar. Rechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau *(4 Punkte)*.

b) Berechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau:

b1) $\overline{z_1} - z_2$, b2) $z_1 \cdot \overline{z_2}$, b3) $\frac{z_2}{\overline{z_1}}$ *(je 1 Punkt)*.

c) Bestimmen Sie alle Lösungen von $w^3 = \overline{z_2}$, und zeichnen Sie diese in ein Diagramm. Rechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*.

Aufgabe 2

a) Bestimmen Sie die linear-homogene DGL mit konstanten Koeffizienten und der Lösung $f(x) = c_1 \cdot e^{i \cdot x} + c_2 \cdot e^{-i \cdot x} + c_3 \cdot e^{4 \cdot x} + x \cdot c_4 \cdot e^{4 \cdot x}$ *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung von $f''(x) + 5 \cdot f'(x) - 2 \cdot f(x) = x^2 + x$ *(5 Punkte)*.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem $f''(x) - f(x) = 0, f(0) = 0, f'(0) = 1$ *(3 Punkte)*.

Aufgabe 3

Kreuzen Sie jeweils das Feld ☐ mit der einzigen richtigen Alternative an.

richtige Antwort: 1 Punkt falsche bzw. fehlende Antwort: 0 Punkte

a)	$z = 1 + i \quad \Leftrightarrow$			
	$\overline{z} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 315°}$ ☐	$\overline{z} = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°}$ ☐	$\overline{z} = -\sqrt{2} \cdot e^{i \cdot 45°}$ ☐	$\overline{z} = -1 - i$ ☐
b)	Für $f(x) = 2 \cdot \ln(x) \quad \mathbb{D}_f =]0, \infty[$ gilt $f'''(2) =$			
	-2 ☐	$-0{,}5$ ☐	$0{,}5$ ☐	2 ☐
c)	Der Winkel zwischen $\vec{a} = \begin{pmatrix} \sin(\pi/2) \\ \ln 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} \sqrt[4]{4} \\ 2 \cdot \cos(\pi/4) \end{pmatrix}$ ist $\varphi =$			
	$0°$ ☐	$45°$ ☐	$90°$ ☐	$180°$ ☐
d)	Die linear-homogene DGL $f'(x) + f(x) = 0$ hat die allgemeine Lösung $f(x) =$			
	$c \cdot e^{x} \quad c \in \mathbb{R}$ ☐	$c \cdot e^{-x} \quad c \in \mathbb{R}$ ☐	$c \cdot x \quad c \in \mathbb{R}$ ☐	e^{-x} ☐
e)	Die Ebene $\varepsilon: \quad 2 \cdot x - 3 \cdot z = 5$ verläuft parallel zur			
	x-Achse ☐	y-Achse ☐	z-Achse ☐	x-Achse und zur y- Achse ☐
f)	Alle reellen Nullstellen von $f(x) = \sin(x) \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ sind:			
	$x_N = 1$ ☐	$x_{Nk} = \frac{k}{2} \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ ☐	$x_{Nk} = k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ ☐	$x_{Nk} = 2 \cdot k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$ ☐
g)	$f'(x) = \frac{1}{x}$ ist die erste Ableitung von $f(x) =$			
	$\sqrt{2 \cdot x}$ ☐	$2 \cdot \sqrt{x}$ ☐	$2 \cdot \ln(x)$ ☐	$\ln(2 \cdot x) - 2$ ☐
h)	$A(1\|2)$ und $B(3\|5)$ haben den Abstand $d =$			
	5 ☐	$\sqrt{5}$ ☐	$\sqrt{13}$ ☐	13 ☐
i)	$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 4}$ hat die horizontale Asymptote:			
	$y = -1$ ☐	$y = 0$ ☐	$y = 1$ ☐	keine ☐
j)	$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 4}{x^2 - 4}$ hat die Polstellen:			
	$x_P = -2$ ☐	$x_P = 2 \wedge x_P = -2$ ☐	$x_P = 2$ ☐	keine ☐

(10 Punkte)

Aufgabe 4

Wir haben die Funktion $f(x)=\frac{1}{4}\cdot x^3-3\cdot x^2+9\cdot x \quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie alle reellen und nicht-reellen Nullstellen *(2 Punkte)*.

b) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte *(4 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie alle Wendepunkte *(2 Punkte)*.

d) Bestimmen Sie die Tangentengleichung in $P(4|4)$ *(2 Punkte).*

Aufgabe 5

a) Gegeben sind die Punkte $A(1|2|3)$, $B(4|6|8)$ und $C(1|7|9)$.

a1) Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung einer Geraden $\mathcal{G}_1$ durch A und B *(1 Punkt)*.

a2) Zeigen Sie, dass A, B und C ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei B bilden *(2 Punkte)*.

a3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks *(2 Punkte)*.

a4) Bestimmen Sie einen Punkt D, so dass A, B, C und D ein Rechteck bilden *(1 Punkt)*.

b) Wir haben die Ebene $\varepsilon: \quad 2\cdot x-5\cdot y+z=-4$.

b1) Bestimmen Sie den Durchstoßpunkt S der Geraden $\mathcal{G}_2: \quad r_{\mathcal{G}}=\begin{pmatrix}1\\-3\\13\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\7\\-3\end{pmatrix} \quad t\in\mathbb{R}$ durch ε *(2 Punkte)*.

b2) Bestimmen Sie des Abstand des Punktes $P(1|3|-1)$ von ε *(2 Punkte)*.

Aufgabe 6

a) Bestimmen Sie die Fläche zwischen $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2} \cdot x + 4 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1 \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ innerhalb der Schnittpunkte der beiden Funktionen.

Rechnen Sie auf drei Nachkommastellen genau *(3 Punkte)*.

b) Berechnen Sie die folgenden Integrale auf drei Nachkommastellen genau:

b1) $\int_{-2}^{5} (4 \cdot x - 3)^3 \, dx$ *(2 Punkte)*,

b2) $\int_{0}^{1} 3 \cdot x \cdot e^{2 \cdot x} dx$ *(3 Punkte)*.

c) Bestimmen Sie x_A für $\int_{x_A}^{10} \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}$ *(2 Punkte)*.